Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Online seminář aplikované matematiky, ložnice, 1. června 2021

D. Lukáš, L. Foltyn, A. Bílek

email: dalibor.lukas@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Úvod

Motivace: DDM pro časo-prostorové diskretizace, Prof. Steinbach (Graz)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \triangle_x u(x,t) & = & f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) & = & 0, & (x,t) \in \Gamma_{\mathrm{D}} \times (0,T), \\ \frac{du}{dn}(x,t) & = & g(x,t), & (x,t) \in \Gamma_{\mathrm{N}} \times (0,T), \\ u(x,0) & = & 0, & x \in \Omega. \end{array}\right.$$

V této přednášce se omezíme na 1d úlohy.

Okrajová úloha

$$(P_x) \quad \left\{\begin{array}{rcl} -u''(x) & = & f(x), \;\; x \in (0,1), \\ u(0) & = & 0, \\ u'(1) & = & g. \end{array}\right.$$

Počáteční úloha

$$(P_t) \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) + a(t)u(t) & = & f(t), \;\; t \in (0,1), \\ u(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Osnova

- Silná variační formulace
  - existence, inf-sup podmínka, jednoznačnost, stabilita,
  - stabilní Galerkinova (MKP) aproximace, konvergence.
- Slabá variační formulace
- Ještě slabší variační formulace

Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Osnova

- Silná variační formulace
  - existence, inf-sup podmínka, jednoznačnost, stabilita,
  - stabilní Galerkinova (MKP) aproximace, konvergence.
- Slabá variační formulace
- Ještě slabší variační formulace

Silná variační formulace

Okrajová úloha: $f \in L^2(0,1)$**,** $g \in \mathbb{R}$

$$
(S_x) \quad \begin{cases} \text{Hledáme } u_H \in U := H^2_{0,;,0}(0,1) := \{w \in H^2(0,1) : w(0) = w'(1) = 0\} : \\ \underbrace{-\int_0^1 u''_H(x)v(x)dx}_{=:\langle Au,v\rangle} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)dx}_{=:\langle b,v\rangle} \quad \forall v \in V := L^2(0,1), \\ u(x) := u_H(x) + gx. \end{cases}
$$

Počáteční úloha: $a \in L^\infty(0,1)$**,** $f \in L^2(0,1)$

$$
(S_t) \quad \begin{cases} \text{Hledáme } u \in U := H^1_{0,}(0,1) := \{w \in H^1(0,1) : w(0) = 0\} : \\ \underbrace{\int_0^1 [u'(x) + a(x)u(x)]\, v(x)dx}_{=:\langle Au,v\rangle} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)dx}_{=:\langle b,v\rangle} \quad \forall v \in V := L^2(0,1). \end{cases}
$$

Hledáme $u \in U$: $Au = b$ na V', kde U, V Hilbertovy prostory, $A \in \mathcal{L}(U, V')$.

Silná variační formulace

Existence řešení $\Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}\, A$

Věta o uzavřeném grafu (Closed range theorem):

$$\mathrm{Im}\, A \text{ je uzavřený ve } V' \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, A = (\mathrm{Ker}\, A')^0 \Leftrightarrow \dots$$

Budeme tedy předepisovat podmínku řešitelnosti

$$\forall v \in V : \langle Au, v\rangle = 0 \; \forall u \in U \Rightarrow \langle b, v\rangle = 0.$$

t.j.

$$(S_x) \qquad \forall v \in L^2(0,1) : \; -\int_0^1 u''(x)v(x)dx = 0 \; \forall u \in H^2_{0,;,0}(0,1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0,$$

$$(S_t) \qquad \forall v \in L^2(0,1) : \int_0^1 \left[u'(x) + a(x)u(x)\right] v(x)dx = 0 \; \forall u \in H^1_{0,}(0,1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0.$$

Směrem k jednoznačnosti

Hledáme $u \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp \subset U : \; Au = b$ na V', kde U, V Hilbertovy prostory, $A \in \mathcal{L}(U, V')$.

Silná variační formulace

Inf-sup podmínka (odraženost nejmenšího nenulového singulárního čísla)

$$\exists c > 0 \ \forall u \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} : \quad \underbrace{\|Au\|_{V'}}_{\sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, v\rangle}{\|v\|_V}} \geq c\|u\|_U$$

t.j.

$$\exists c > 0 : \quad \inf_{u \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} \setminus \{0\}} \ \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, v\rangle}{\|u\|_U \, \|v\|_V} \geq c.$$

Jednoznačnost

$$\begin{array}{l} u_1 \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} : Au_1 = b \\ u_2 \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} : Au_2 = b \end{array} \Rightarrow \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle \overbrace{A(u_1 - u_2)}^{=0}, v\rangle}{\|v\|_V} \geq c\|u_1 - u_2\|_U \geq 0 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2$$

Stabilita

$$u \in (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp} : Au = b \ \Rightarrow \ c\|u\|_U \leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, v\rangle}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle b, v\rangle}{\|v\|_V} = \|b\|_{V'}$$

Silná variační formulace

Inf-sup podmínka — technika důkazu

Stačí ukázat:

$$\exists c > 0 \; \forall u \in (\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} \; \exists v \in V \setminus \{0\} : \; \langle Au, v \rangle \geq c \|u\|_U \, \|v\|_V .$$

Stačí najít $L \in \mathcal{L}(U, V)$ t.j. $\|Lu\|_V \leq C_L \|u\|_U$ tak, že $L'A$ je eliptický na $(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$, viz

$$\langle Au, \underbrace{Lu}_{=v} \rangle \geq c_{L'A} \|u\|_U^2 \geq \underbrace{\frac{c_{L'A}}{C_L}}_{=:c} \|u\|_U \, \|v\|_V .$$

$$(S_x) \qquad -\int_0^1 u''(x) \underbrace{v(x)}_{:=-u''(x)} \, dx = |u|_2^2 \overset{u'(1)=0}{\geq} c_1(|u|_1^2 + |u|_2^2) \overset{u(0)=0}{\geq} c\|u\|_2^2 .$$

$$(S_t) \qquad \int_0^1 [u'(x) + a(x)u(x)] \underbrace{v(x)}_{:=u'(x)+a(x)u(x)} \, dx \overset{a(x)=a>0, u(0)=0}{\geq} c\|u\|_1^2$$

Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Osnova

- Silná variační formulace
  - existence, inf-sup podmínka, jednoznačnost, stabilita,
  - stabilní Galerkinova (MKP) aproximace, konvergence.
- Slabá variační formulace
- Ještě slabší variační formulace

Silná variační formulace

Diskrétní inf-sup podmínka, stabilní Galerkinova aproximace

U_n, V_m konečně-dimenzionální podprostory U, V splnující:

$$\exists c > 0\ \forall u_n \in U_n \cap (\mathrm{Ker}\, A)^\perp\ \exists v_m \in V_m \setminus \{0\} :\ \langle Au_n, v_m\rangle \geq c\|u_n\|_U\, \|v_m\|_V.$$

např.

(S_x) $\quad U_n \subset C^1(0,1)$ po částech kubické , V_m po částech lineární, $L(u_n) := -u_n''$

(S_t) $\quad U_n \subset C(0,1)$ po částech lineární , V_m po částech konstantní, $L(u_n) := u_n' + au_n$

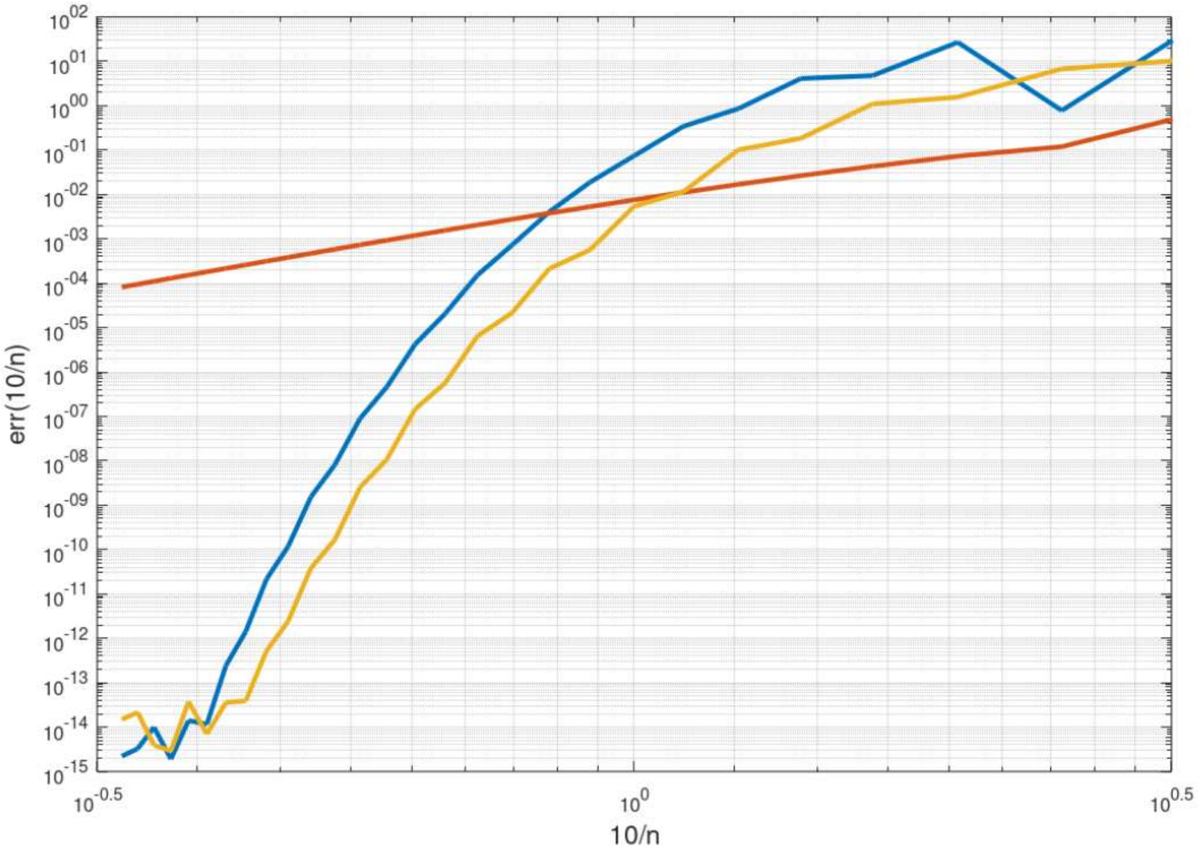
Konvergence

$$\|u - u_n\|_U \leq \left(1 + \frac{C}{c}\right) \|u - w_n\|_U\ \forall w_n \in U_n$$

MKP, Runge-Kutta $\rightsquigarrow \|u - u_n\| \leq Kn^{-p}|u|_{p+1}, p > 0.$
Spektrální metody $\rightsquigarrow \|u - u_n\| \leq \widetilde{K}10^{-n}$, u analytická.

Silná variační formulace

Konvergence Runge-Kutta vers. spektrálních metod (Bc. práce A. Bílka)



Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Osnova

- Silná variační formulace
  - existence, inf-sup podmínka, jednoznačnost, stabilita,
  - stabilní Galerkinova (MKP) aproximace, konvergence.
- Slabá variační formulace
- Ještě slabší variační formulace

Slabá variační formulace

Okrajová úloha: $f \in H^1_{0,}(0,1)'$, $g \in \mathbb{R}$

$$(V_x) \quad \begin{cases} \text{Hledáme } u \in U := V := H^1_{0,}(0,1) := \{w \in H^1(0,1) : w(0) = 0\} : \\ \underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x)dx}_{=:\langle Au,v\rangle} = \underbrace{\langle f, v\rangle + gv(1)}_{=:\langle b,v\rangle} \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Slabá formulace nám v 1d např. umožní uvažovat bodové zdroje/síly (Dirac)

$$\langle \delta_a, v\rangle := v(a) \overset{v(0)=0}{=} -\int_0^1 \eta(a-x)v'(x)dx,$$

kde η je Heavisideova funkce.

Symetrická formulace

Hledáme $u \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp \subset V : \; Au = b$ na V', kde V Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{L}(V, V')$.

Slabá variační formulace

Elipticita (odraženost vlastních čísel) $\Rightarrow$ jednoznačnost, stabilita

$$\exists c > 0\ \forall v \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} :\ \langle Av, v\rangle \geq c\|v\|_V^2.$$

Opět využíváme Poincarého nerovnost

$$(V_x) \qquad \int_0^1 [v'(x)]^2\, dx \overset{v(0)=0}{\geq} c\|v\|_1^2.$$

Konformní Galerkinova (MKP) aproximace dědí elipticitu

$V_n \subset V$ konečně-dimenzionální podprostor:

$$\forall v_n \in V_n \cap (\operatorname{Ker} A)^{\perp} :\ \langle Av_n, v_n\rangle \geq c\|v_n\|_V^2.$$

Silná, slabá a ještě slabší variační formulace a metody konečných prvků

Osnova

- Silná variační formulace
  - existence, inf-sup podmínka, jednoznačnost, stabilita,
  - stabilní Galerkinova (MKP) aproximace, konvergence.
- Slabá variační formulace
- Ještě slabší variační formulace

Ještě slabší variační formulace

Okrajová úloha: $f \in H^2_{0,;,0}(0,1)'$, $g \in \mathbb{R}$

$$
(U_x) \quad \begin{cases} \text{Hledáme } u \in U := L^2(0,1) : \\ \underbrace{-\int_0^1 u(x)v''(x)dx}_{=:\langle Au,v\rangle} = \underbrace{\langle f,v\rangle + gv(1)}_{=:\langle b,v\rangle} \quad \forall v \in V := H^2_{0,;,0}(0,1). \end{cases}
$$

Počáteční úloha: $a \in L^\infty(0,1)$, $f \in H^1_{,0}(0,1)'$

$$
(U_t) \quad \begin{cases} \text{Hledáme } u \in L^2(0,1) : \\ \underbrace{\int_0^1 \left[-u(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x)\right] dx}_{=:\langle Au,v\rangle} = \underbrace{\langle f,v\rangle}_{=:\langle b,v\rangle} \quad \forall v \in V := H^1_{,0}(0,1). \end{cases}
$$

Hledáme $u \in (\operatorname{Ker} A)^\perp \subset U$: $Au = b$ na V', kde U, V Hilbertovy prostory, $A \in \mathcal{L}(U, V')$.

Ještě slabší variační formulace

Inf-sup podmínka

$$(U_x) \qquad -\int_0^1 u(x)v''(x)dx \overset{v:=-\int_0^x\int_0^y u(z)dzdy}{=} \|u\|_0^2.$$

$$(U_t) \qquad \int_0^1 \left[-u(x)v'(x) + a(x)u(x)v(x)\right] dx \overset{a(x):=0, v(x):=-\int_0^x u(y)dy}{=} \|u\|_0^2$$

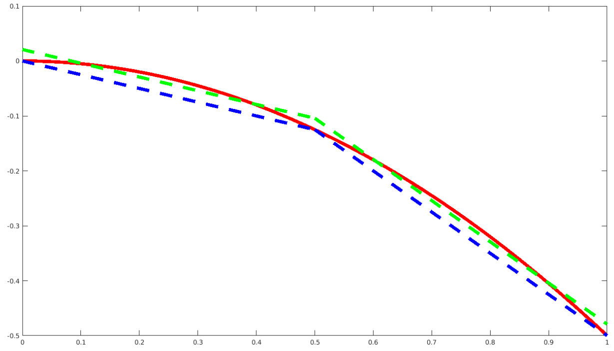
Stabilní Galerkinova aproximace

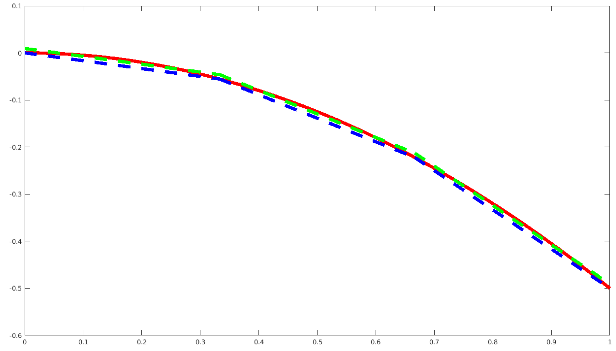
(U_x) $\qquad U_n$ po částech lin., $V_m \subset C^1(0,1)$ po částech kub., $L(u_n) := -\int_0^x \int_0^y u_n(z)dzdy$

(U_t) $\qquad U_n$ po částech konstantní, $V_m \subset C(0,1)$ po částech lineární , $L(u_n) := -\int_0^x u_n(y)dy$

Silná, slabá a ještě slabší MKP aproximace

MKP pro okrajovou úlohu: $f(x) := 1$, 2 prvky, 3 prvky





MKP pro okrajovou úlohu: $f(x) := \sin((\pi/2)x)$, $\|u - u^h\|_0$